

**KOKURS MATEMATYCZNY „ZADANIA MIESIĄCA”
CZERWIEC 2014
klasa 2 LO**

Zadanie 1. Twierdzenie Ptolemeusza.

Wykazać, że jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to suma iloczynów długości przeciwległych boków jest równa iloczynowi długości przekątnych tego równoległoboku.

Zadanie 2.

Wykazać, że jeżeli wielomian $x^3 + ax + b$ ma pierwiastek podwójny, to $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Zadanie 3.

Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ oraz punkt $M = (\frac{1}{2}, 2)$.

- a) Jaką najmniejszą długość ma promień okręgu, który jest styczny wewnętrznie do danego okręgu i przechodzi przez punkt M?
- b) W dany okrąg wpisano kwadrat tak, że punkt M należy do jednej z jego przekątnych. Napisz równania prostych, w których zawierają się boki tego kwadratu.
- c) Wykaż, że punkt $P = (4, 2)$ może być wierzchołkiem kwadratu opisanego na tym okręgu.

Zadanie 4.

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$